/Министерство науки и образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе № 10

по дисциплине «Программная инженерия задач вычислительной математики»

**Численное решение задачи Коши.**

ОГУ 09.03.04.4024.704 ПЗ

Руководитель

канд. техн. наук, доцент

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е. А. Шнякина

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г.

Исполнитель

Студент группы 22ПИнж(б)РПиС-1

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.В. Федоров

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г.

Оренбург 2024

**Задание**

**Цель:** освоить алгоритмы методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

**Задание:**

1. Найти численное решение задачи Коши

методами Эйлера, Рунге-Кутта 4 порядка на следующих разностных сетках:

***τ = 0,1; τ = 0,05; τ = 0,025; τ = 0,0125; τ = 0,00625; τ = 0,003125,***

согласно выбранному варианту.

1. На последовательности указанных сеток проверить сходимость полученного численного решения для указанных методов.
2. Осуществить сопоставление методов и полученных численных решений. Для сопоставления методов вычислить

,

где , - точное решение

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вариант | *f(t,u)* | *t0* | *T* | *u0* | *точное решение* |
| 17 | *e3t+3(u-1)* | 0 | 1 | 1 | *te3t+1* |

**Практическая часть**

**Метод Эйлера**

Необходимо найти численное решение задачи Коши

,

начальное условие.

Условия, гарантирующие существование и единственность задачи Коши:

1. функция *f*(*t*, *u*) определена и непрерывна по всем аргументам в замкнутой области

2. функция *f*(*t*, *u*) удовлетворяет условию Липшица для любых .

По переменной *t* введём равномерную сетку , *i=0, 1, 2, … (* - шаг сетки).

Аппроксимируем производную направленной разностью «вперёд»

.

Дифференциальное уравнение принимает дискретную форму

.

Выражая получим расчетную формулу метода Эйлера.

.

Метод имеет первый порядок точности относительно . Ошибка аппроксимации .

Алгоритм

1. задаются начальные условия *t0*, *u0*
2. задается - шаг сетки
3. вычислим
4. для вычислить

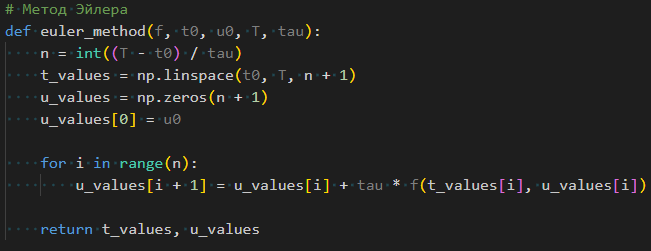


Рисунок 2 – Первая производная разностями вперед

**Метод предиктор-корректор**

Наряду с основной сеткой , *i=0, 1, 2, … (* - шаг сетки) введем в рассмотрение вспомогательную сетку .

Метод двухшаговый.

1 шаг (предиктор) - вычисляются значения функции *u* в узлах вспомогательной сетки.

Аппроксимируем производную направленной разностью «вперёд»

Дифференциальное уравнение принимает разностный вид

.

Вычисляем по формуле

.

2 шаг (корректор) – вычисляются значения функции *u* в узлах основной сетки через найденные значения *u* в узлах вспомогательной сетки.

Выполним аппроксимацию производной симметричной разностью в точке

.

Тогда

.

Откуда находим:

.

Метод имеет второй порядок точности относительно . Ошибка аппроксимации .

Алгоритм

1. задаются начальные условия *t0*, *u0*
2. задается - шаг сетки
3. вычислим
4. для вычислить

4.1

4.2

4.3

4.4

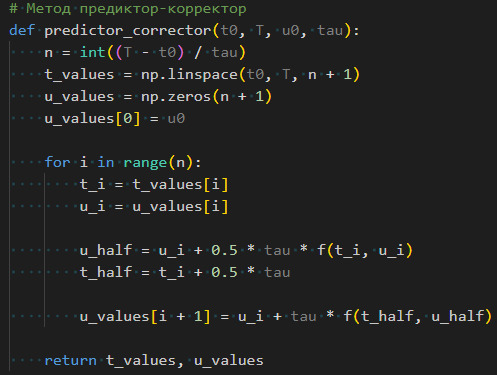


Рисунок 3 – Первая производная разностями назад

**Методы Рунге-Кутта**

Методы семейства Рунге-Кутта являются явными *m*-шаговыми и имеют следующий вид.

Фиксируются числовые коэффициенты *аi*, *bij*, *, i=2, 3, …, m, j=1, 2, …, m-1.*

Последовательно вычисляются функции

*…*

*.*

Значения функции *u* вычисляются по формуле:

.( где )

Отметим, что порядок точности методов совпадает с количеством шагов *m*.

Для *m=1*

Метод является одношаговым. Вычисляется только функция *.*

Тогда

получаем единственную расчетную формулу метода Рунге-Кутта первого порядка, совпадающую с методом Эйлера.

Для *m=2*

В этом случае получаем двухшаговый метод. Необходимо вычислить функции *k1*, *k2*. Формула, по которой вычисляются значения функции *u,* принимает вид:

,

т.е.

.

Раскладывая левую и правую части последнего выражения в ряд Тейлора относительно *i*-ой точки, получим систему для нахождения коэффициентов .

.

Данная система имеет множество решений, соответственно получаем множество формул второго порядка точности.

Пусть , тогда - в этом случае получаем формулы, совпадающие с расчетными формулами метода предиктор-корректор.

Пусть , тогда - в этом случае получаем

.

Для *m=3*

Для трехшагового метода необходимо вычислить функции *k1*, *k2*, *k3* . Формула, по которой вычисляются значения функции *u,* принимает вид:

,

т.е.

.

Для того, чтобы получить значения коэффициентов , раскладываем, аналогично, как предыдущем случае, левую и правую части последнего выражения в ряд Тейлора относительно *i*-ой точки. Получим систему, определяющую значения перечисленных коэффициентов, удовлетворяющих требованию третьего порядка точности метода Рунге-Кутта. Наиболее часто используемыми значениями коэффициентов являются следующие варианты.

Алгоритм

1. задаются начальные условия *t0*, *u0*
2. задается - шаг сетки
3. вычислим
4. для вычислить

4.1

4.2

4.3

*…*

4.m

4.m+1

4.m+2

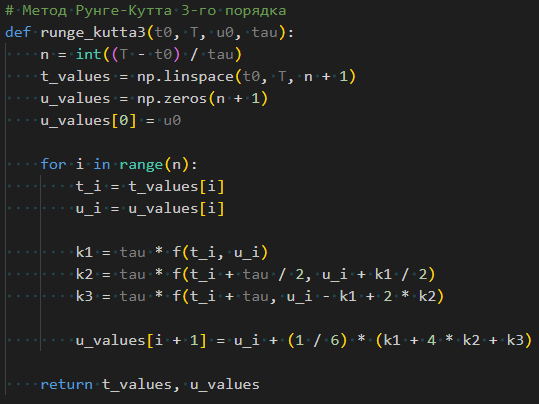


Рисунок 4 – Первая производная со вторым порядком точности

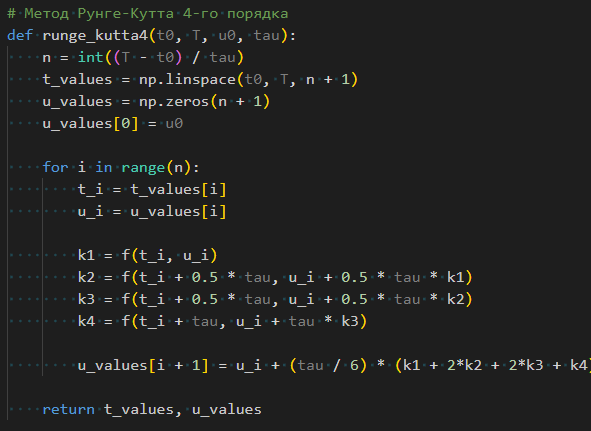


Рисунок 5 – Рунге Кутта 4го порядка

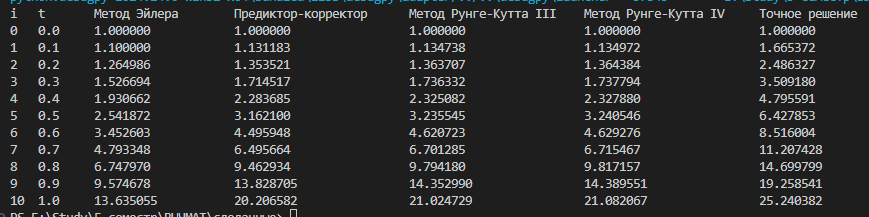


Рисунок 5 – Результаты для 0.1

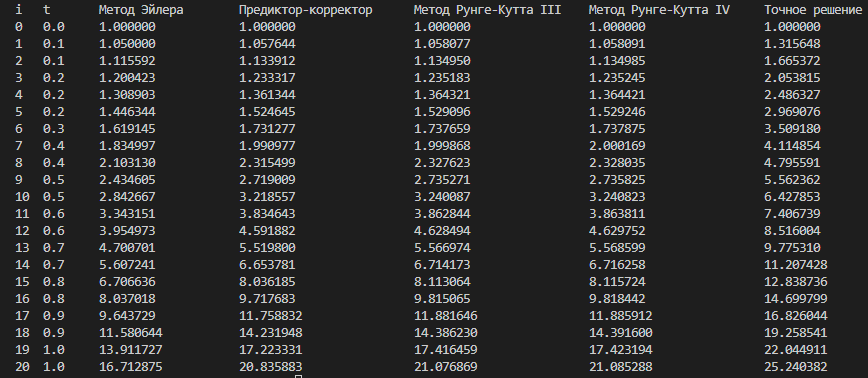


Рисунок 5 – Результаты для 0.05

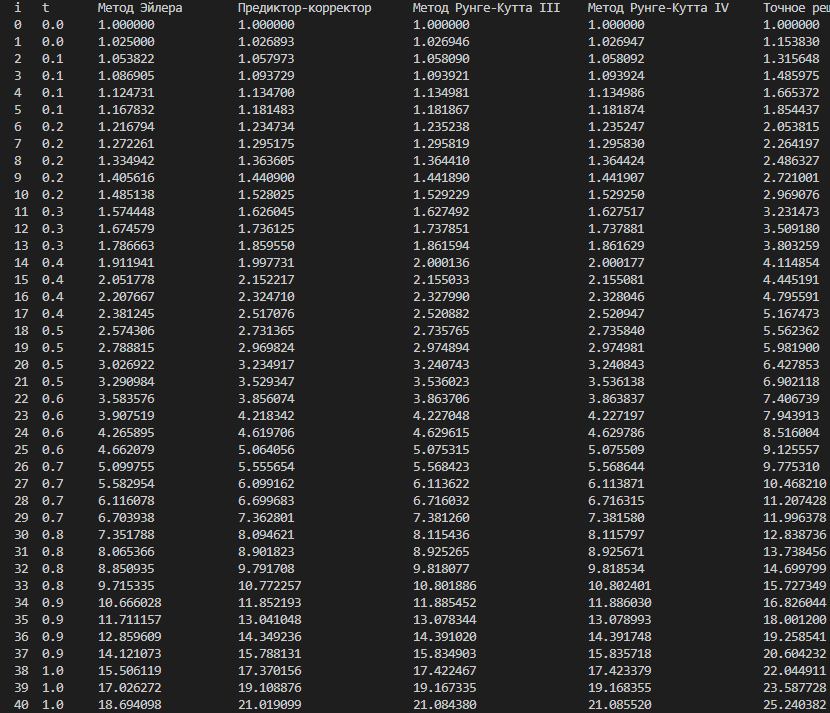


Рисунок 5 – Результаты для 0.025

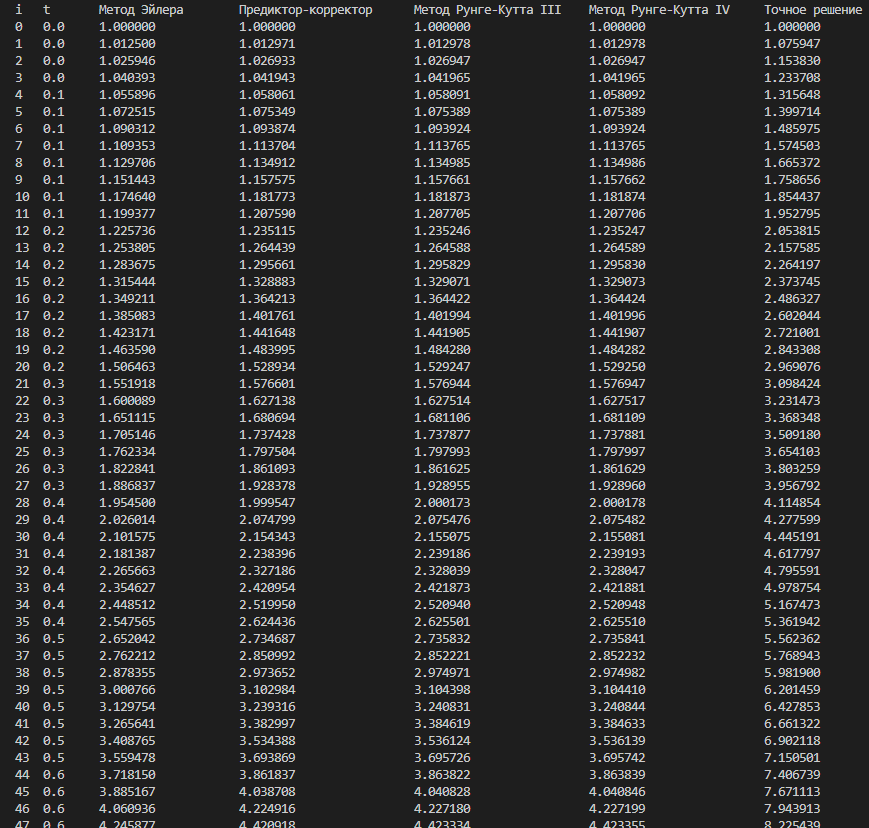


Рисунок 5 – Результаты для 0.0125

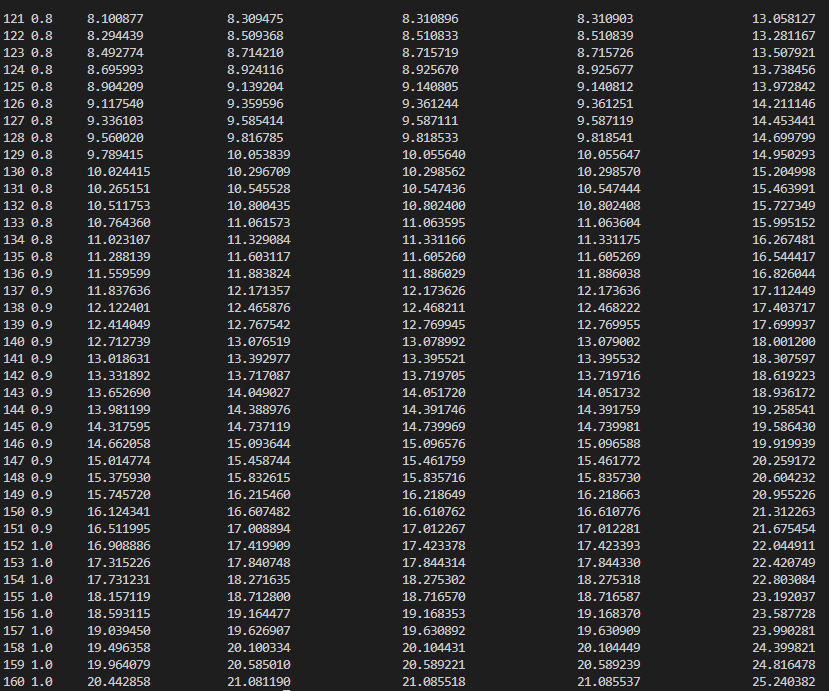


Рисунок 5 – Результаты для 0.00625

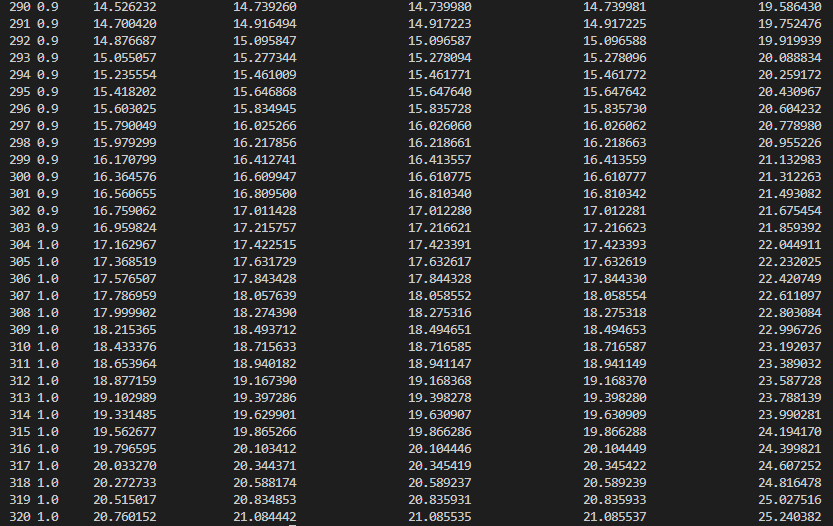


Рисунок 5 – Результаты для 0.003125

# 

**Сопоставление методов**

Для сопоставления методов необходимо вычислить

, где

# - точное решение

# 

Рисунок 5 – Сопоставление методов

Анализ результатов показывает, что при решении данной задачи метод Рунге-Кутта IV порядка является самым точным, на порядок хуже результаты у метода Рунге-Кутта III порядка. Метод предиктор-корректор точнее метода Эйлера, но намного уступает методам Рунге-Кутта III и IV порядка.

Кроме того, для каждого метода уменьшается с уменьшением шага сетки.

# **Вывод**

Для задачи численного решения дифференциальных уравнений наилучший выбор — использование метода Рунге-Кутта 4-го порядка, который обеспечивает высокую точность при разумных вычислительных затратах. Методы Эйлера и предиктор-корректор могут быть полезны в случае необходимости быстрого приближенного решения, однако их точность ограничена, и для более сложных задач с требуемой высокой точностью предпочтительнее использовать методы Рунге-Кутта.